

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИКИ СТРАНЫ

Эрнест Аксень, Владимир Руденков

Предлагаемая нами и описанная ниже стохастическая динамическая модель предназначена для определения и исследования детерминантов экономического роста в Беларуси, оперативной оценки влияния инвестиционной, налоговой, денежно-кредитной и бюджетной политики правительства на макроэкономические показатели (ВВП, инфляцию, долларизацию, внутренние и иностранные инвестиции, др.), варьирования и исследования различных гипотетических сценариев экономической политики и выбора наилучшего среди них. Результаты предлагаемого исследования детерминантов экономического роста в Беларуси могут иметь практическое значение и для других стран.

Известно, что каждый из возможных сценариев экономической политики государства имеет, как правило, свои плюсы и минусы. Важным при этом является определение превалирующего эффекта того или иного сценария экономической политики (положительного или отрицательного). (Например, широко используемые в Беларуси выдачи правительственных кредитов, государственные инвестиции в собственный капитал и субсидирование предприятий, с одной стороны, положительно влияют на экономический рост, а с другой, поскольку это делается за счет денежной эмиссии (сеньоража), — отрицательно. Поэтому представляется интересным и актуальным определить преобладающий эффект и сделать вывод относительно правильности выбора этого элемента экономической политики.)

С помощью предлагаемой стохастической динамической модели можно, например, протестировать ряд гипотез.

1. Политика государства, нацеленная на поддержку предприятий путем кредитования и субсидирования, даже обеспечиваемая за счет монетизации дефицита бюджета и ведущая, таким образом, к инфляции, все же имеет преимущество по позитивным эффектам над негативными в сравнении с политикой малой государственной поддержки производственного сектора.

2. Приватизация (в особенности большая) и дерегулирование не ведут к росту инвестиций, а от него — к экономическому росту, если имеют место:

— неуверенность "новых" собственников в том, что основной капитал принесет прибыль (государство, как собственник средств производства, "боится" рисков меньше, чем частные владельцы — инвесторы);

— низкий уровень жизни населения (когда домохозяйства имеют низкий уровень дохода, они менее склонны рисковать и инвестировать свои денежные средства в экономику);

— неуверенность относительно стабильности экономической политики государства (боязнь национализации).

3. Финансирование дефицита бюджета путем денежной эмиссии имеет меньший негативный эффект, чем обеспечение необходимого финансирования за счет внешних источников, если последнее ведет к существенному росту внешнего долга государства.

Предлагаемая модель обладает чертами как теоретической, так и эконометрической модели, т. е., с одной стороны, она описывает структуру и особенности экономической системы (экономики Беларуси), а с другой — может быть использована для работы с реальными данными. Стохастический характер модели позволяет учитывать финансовые и производственные риски при прогнозировании.

Модель учитывает интересы субъектов экономики: домашних хозяйств, фирм и иностранных инвесторов.

1. Информационная структура модели

Информационная структура модели задается фильтрованным вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, [\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}, P)$ (где $[\mathcal{F}_t]_{t \geq 0} = [\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots]$ — поток σ -алгебр, т. е. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}, \forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}$, и $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}$).

Напомним, что случайный процесс (траектория) $\xi = [\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots]$ называется $[\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ -согласованным, если при любом $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ случайная величина ξ_t измерима относительно σ -алгебры \mathcal{F}_t .

З а м е ч а н и е. $[\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ -согласованность случайного процесса $\xi = [\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots]$, в частности, означает, что (при любом $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$) значение случайной величины ξ_t известно в момент времени t .

2. Цены и обменный курс

Одним из основных допущений модели является допущение об однородности продукции. Наряду с (однородной) продукцией в модели присутствуют отечественная и иностранная валюты.

Аксень Эрнест Маврицевич — докторант Белорусского государственного экономического университета

Руденков Владимир Михайлович — профессор, заведующий кафедрой международных экономических отношений факультета международных отношений Белорусского государственного университета

В модели рассматривается только один вид иностранной валюты. Вполне возможно, что может возникнуть необходимость введения в модель нескольких видов валюты.

Цены в отечественной и иностранной валюте (на однородную продукцию) обозначим, соответственно, через \hat{P}_t^d и \tilde{P}_t^f ,

где $\hat{P}^d = [\hat{P}_t^d]_{t \geq 0}$ и $\tilde{P}^f = [\tilde{P}_t^f]_{t \geq 0}$ — (бесконечные) последовательности $[\hat{P}_0^d, \hat{P}_1^d, \hat{P}_2^d, \dots]$ и $[\tilde{P}_0^f, \tilde{P}_1^f, \tilde{P}_2^f, \dots]$.

З а м е ч а н и е. Всюду в дальнейшем символ "^" над обозначением некоторой величины будет означать, что соответствующая величина выражена в отечественной валюте, символ "~" — в иностранной валюте, а отсутствие этих символов — в единицах продукции. Верхние индексы d и f означают, что соответствующие денежные потоки выплачиваются, соответственно, в отечественной и иностранной валюте.

В модели предполагается, что $\hat{P}^d = [\hat{P}_t^d]_{t \geq 0}$ и $\tilde{P}^f = [\tilde{P}_t^f]_{t \geq 0} = [\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ -согласованные случайные траектории, причем $\hat{P}_t^d > 0$ и $\tilde{P}_t^f > 0$ почти наверное (п.н.).

Обозначим через e_t обменный курс в периоде t . (e_t — это цена одной единицы иностранной валюты в отечественной валюте в периоде t .) В модели будем предполагать, что обменный курс e_t устанавливается в

соответствии с принципом паритета цен, т. е. $e_t = \frac{\hat{P}_t^d}{\tilde{P}_t^f}$.

3. Фирмы

3.1. Задача максимизации полезности для фирм

Под отечественными фирмами в модели понимаются фирмы-резиденты, предполагая, что руководители отечественных фирм оцениваются по свободным денежным потокам собственного капитала.

Пусть \widehat{CF}_t^{Ed} и \widetilde{CF}_t^{Ef} — свободные денежные потоки (в периоде t) собственного капитала отечественных фирм, выплачиваемые, соответственно, в отечественной и иностранной валюте. Обозначим через CF_t^{Ed} и CF_t^{Ef} соответствующие денежные потоки, выраженные в единицах продукции, т. е. $CF_t^{Ed} = \frac{\widehat{CF}_t^{Ed}}{\hat{P}_t^d}$,

$$CF_t^{Ef} = \frac{\widetilde{CF}_t^{Ef}}{\tilde{P}_t^f}.$$

З а м е ч а н и е. Денежные потоки CF_t^{Ed} и CF_t^{Ef} могут принимать отрицательные значения.

Обозначим через CF_t^E суммарный свободный денежный поток собственного капитала отечественных фирм, выраженный в единицах продукции, т. е. $CF_t^E = CF_t^{Ed} + CF_t^{Ef}$.

Будем предполагать, что полезность U^P руководства отечественных фирм определяется последовательностью $CF^E = [CF_t^E]_{t \geq 1}$ свободных денежных потоков собственного капитала, причем

$$U^P(CF^E) = E \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta_t^P \cdot u^P(CF_t^E) \right], \quad (1)$$

где $u^P(\cdot)$ — функция полезности;

$\beta_t^P \in (0, 1)$ — коэффициент межвременных предпочтений для периода t ;

$\beta^P = [\beta_t^P]_{t \geq 1} = [\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ -согласованный случайный процесс; $E[\cdot]$ — оператор математического ожидания.

Использование функции полезности, а не текущей стоимости свободных денежных потоков собственного капитала (формула (1)) объясняется неразвитостью рынков финансовых активов в Беларуси. Вместе с тем основным критерием оценки деятельности руководителей белорусских фирм их владельцами в конечном итоге служат свободные денежные потоки (поэтому они выступают в качестве аргумента функции полезности отечественных фирм).

Заметим, что

$$CF_t^E = \Pi_t^E - I_t^E, \quad \Pi_t^E = \Pi_t - \Pi_t^B, \quad (2)$$

где Π_t — прибыль отечественных фирм;

Π_t^E и Π_t^B — прибыль, соответственно, собственного и заемного капитала;

I_t^E — инвестиции в собственный капитал. Верхние индексы E и B обозначают собственный и заемный капитал соответственно.

В свою очередь,

$$\Pi_t = Y_t - W_t^D - T_t^P + r_t^{PFA} \frac{PFA_{t-1}}{1 + i_t^f}, \quad (3)$$

где Y_t — валовой внутренний продукт (ВВП) в периоде t ;

W_t^D — заработная плата, выплачиваемая отечественными фирмами домашним хозяйствам;

T_t^P — налоги, выплачиваемые отечественными фирмами в периоде t ;

PFA_{t-1} — иностранные активы отечественных фирм в начале периода t ;

r_t^{PFA} — доходность этих активов в периоде t ;

$r^{PFA} = [r_t^{PFA}]_{t \geq 1}$ — согласованный случайный процесс;

i_t^f — уровень инфляции иностранной валюты в периоде t .

В выражение T_t^P можно также включить правительственные субсидии отечественным фирмам (фирмам-резидентам).

Отметим, что

$$PFA_t = \frac{PFA_{t-1}}{1 + i_t^f} + PFI_t, \quad (4)$$

где PFI_t — инвестиции в иностранные активы отечественных фирм.

Заметим, что

$$\Pi_t^B = \frac{r_t^{Hd} B_{t-1}^{Hd} + r_t^{Gd} B_{t-1}^{Gd} + r_t^{Fd} B_{t-1}^{Fd}}{1 + i_t^d} + \frac{r_t^{Hf} B_{t-1}^{Hf} + r_t^{Gf} B_{t-1}^{Gf} + r_t^{Ff} B_{t-1}^{Ff}}{1 + i_t^f}, \quad (5)$$

где B_{t-1}^{Hd} , B_{t-1}^{Gd} , B_{t-1}^{Fd} и B_{t-1}^{Hf} , B_{t-1}^{Gf} , B_{t-1}^{Ff} — заемный капитал домашних хозяйств, государства (правительства) и иностранных инвесторов, в отечественной и иностранной валюте, соответственно, в начале периода t ;

r_t^{Hd} , r_t^{Gd} , r_t^{Fd} и r_t^{Hf} , r_t^{Gf} , r_t^{Ff} — соответствующие доходности в периоде t ;

$r^{Hd} = [r_t^{Hd}]_{t \geq 1}$, $r^{Gd} = [r_t^{Gd}]_{t \geq 1}$, $r^{Fd} = [r_t^{Fd}]_{t \geq 1}$, $r^{Hf} = [r_t^{Hf}]_{t \geq 1}$, $r^{Gf} = [r_t^{Gf}]_{t \geq 1}$, $r^{Ff} = [r_t^{Ff}]_{t \geq 1}$ — согласованные случайные процессы;

i_t^d и i_t^f — уровни инфляции, соответственно, отечественной и иностранной валют.

В формуле (5) верхние индексы H , G и F обозначают домашние хозяйства, государство (правительство) и иностранных инвесторов, соответственно.

Обратим внимание, что в Беларуси в настоящий период практически отсутствует рынок облигаций фирм. Однако заемный капитал поступает в фирмы от населения через банки. Этим объясняется включение в модель заемного капитала домашних хозяйств.

Для простоты в модели предполагается, что финансовые посредники отсутствуют, и заемный капитал поступает непосредственно от домашних хозяйств в фирмы. Включение финансовых посредников в модель существенно усложнило бы ее структуру.

Заемный капитал может поступать в фирмы от домашних хозяйств, государства и иностранных инвесторов, причем он может поступать как в отечественной, так и в иностранной валюте. Доходности заемного капитала зависят от вида инвестора и вида валюты. При этом доходности заемного капитала могут отличаться от обещанных процентных ставок (поскольку существует риск дефолта). Этим объясняется то, что в начале каждого периода времени доходности заемного капитала (для соответствующего периода) точно не известны. Математически это означает, что соответствующие случайные процессы $r^{Hd} = [r_t^{Hd}]_{t \geq 1}$, $r^{Gd} = [r_t^{Gd}]_{t \geq 1}$, $r^{Fd} = [r_t^{Fd}]_{t \geq 1}$, $r^{Hf} = [r_t^{Hf}]_{t \geq 1}$, $r^{Gf} = [r_t^{Gf}]_{t \geq 1}$, $r^{Ff} = [r_t^{Ff}]_{t \geq 1}$ не являются предсказуемыми, т.е. при любом $t \in \{1, 2, \dots\}$ доходности r_t^{Hd} , r_t^{Gd} , r_t^{Fd} , r_t^{Hf} , r_t^{Gf} , r_t^{Ff} не являются измеримыми относительно σ -алгебры \mathcal{F}_{t-1} .

Отметим, что

$$B_t^{Hd} = \frac{B_{t-1}^{Hd}}{1 + i_t^d} + I_t^{BHd}, B_t^{Gd} = \frac{B_{t-1}^{Gd}}{1 + i_t^d} + I_t^{BGd}, B_t^{Fd} = \frac{B_{t-1}^{Fd}}{1 + i_t^d} + I_t^{BFd}, \quad (6)$$

$$B_t^{Hf} = \frac{B_{t-1}^{Hf}}{1+i_t^f} + I_t^{BHf}, \quad B_t^{Gf} = \frac{B_{t-1}^{Gf}}{1+i_t^f} + I_t^{BGf}, \quad B_t^{Ff} = \frac{B_{t-1}^{Ff}}{1+i_t^f} + I_t^{BFf}, \quad (7)$$

где I_t^{BHd} , I_t^{BGd} , I_t^{BFd} и I_t^{BHf} , I_t^{BGf} , I_t^{BFf} — инвестиции в заемный капитал домашних хозяйств, государства (правительства) и иностранных инвесторов, соответственно, в отечественной и иностранной валютах; i_t^d и i_t^f — уровни инфляции, соответственно, отечественной и иностранной валюты.

Пусть K_{t-1} и K_t — основной капитал отечественной экономики, соответственно, в начале и в конце периода t . В модели предполагается, что

$$K_t = (1 - \delta_t)K_{t-1} + I_t, \quad (8)$$

где $\delta_t \in (0, 1)$ — норма амортизации в периоде t ($\delta = [\delta_t]_{t \geq 1} - [\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ - согласованный случайный процесс); I_t — инвестиции в основной капитал.

Обозначим через \hat{M}_t^{Pd} и \tilde{M}_t^{Pf} запасы отечественных фирм в отечественной и иностранной валюте, соответственно, в конце периода t , а через M_t^{Pd} и M_t^{Pf} — соответствующие запасы, выраженные в единицах продукции, т.е. $M_t^{Pd} = \frac{\hat{M}_t^{Pd}}{\hat{P}_t^d}$ и $M_t^{Pf} = \frac{\tilde{M}_t^{Pf}}{\tilde{P}_t^f}$. Заметим, что

$$M_t^{Pd} = \frac{M_{t-1}^{Pd}}{1+i_t^d} + MI_t^{Pd}, \quad M_t^{Pf} = \frac{M_{t-1}^{Pf}}{1+i_t^f} + MI_t^{Pf}, \quad (9)$$

где MI_t^{Pd} и MI_t^{Pf} — инвестиции в запасы (отечественных фирм) отечественной и иностранной валюты; i_t^d и i_t^f — уровни инфляции, соответственно, отечественной и иностранной валюты.

Можно показать, что имеет место следующая взаимосвязь между инвестициями:

$$I_t + PFI_t + MI_t^P = I_t^{BHd} + I_t^{BHf} + I_t^{BGd} + I_t^{BGf} + I_t^{BFd} + I_t^{BFf} + I_t^E. \quad (10)$$

Инвестиции в равенстве (10) могут быть отрицательными, однако должны выполняться условия неотрицательности для соответствующих запасов:

$$K_t \geq 0, \quad PFA_t \geq 0, \quad M_t^{Pd} \geq 0, \quad M_t^{Pf} \geq 0, \quad B_t^{Hd} \geq 0, \quad B_t^{Gd} \geq 0, \quad B_t^{Hf} \geq 0, \quad B_t^{Gf} \geq 0, \quad B_t^{Ff} \geq 0. \quad (11)$$

Кроме того, естественно потребовать, чтобы для владельцев собственного капитала отсутствовали условия для игры Понци (т.е., чтобы они не могли "злоупотреблять" заемным капиталом фирм). Очевидно, что для этого достаточно потребовать, чтобы $A_t \geq B_t$, где A_t и B_t — рыночная стоимость, соответственно, активов и заемного капитала отечественных фирм. Условие $A_t \geq B_t$ равносильно следующему неравенству:

$$K_t + PFA_t + M_t^{Pd} + M_t^{Pf} \geq B_t^{Hd} + B_t^{Hf} + B_t^{Gd} + B_t^{Gf} + B_t^{Fd} + B_t^{Ff}. \quad (12)$$

В модели предполагается, что производственная функция имеет вид

$$Y_t = \gamma_t F(K_{t-1}, M_{t-1}^{Pd}, M_{t-1}^{Pf}), \quad (13)$$

где Y_t — ВВП;

$\gamma_t = \gamma_{t-1}(1 + g_t)$, $\gamma_0 = 1$, $g = [g_t]_{t \geq 1} - [\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ - согласованный случайный процесс (описывающий экзогенно заданный технологический прогресс, а также случайные отклонения ВВП от своего ожидаемого значения); $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ — (неслучайная) неотрицательная функция.

В число аргументов производственной функции (формула (13)) не включен труд. Это объясняется тем, что численность населения Беларуси существенно не меняется в последние десятилетия.

Включение реальных запасов M_{t-1}^{Pd} и M_{t-1}^{Pf} отечественной и иностранной валюты в производственную функцию (13) вызвано тем, что денежные запасы необходимы фирмам для осуществления сделок. (Увеличение денежных запасов облегчает совершение сделок и, следовательно, положительно сказывается на производственном процессе.)

Однако не только реальные запасы валют, но и их вид влияют на выпуск отечественных фирм (формула (13)). Прежде всего, это связано с существованием правовых ограничений на использование фирмами-резидентами иностранной валюты для внутренних сделок.

В модели предполагается, что налоги T_t^P , выплачиваемые отечественными фирмами (фирмами-резидентами), определяются в соответствии с формулой

$$T_t^P = \xi_t^P T^P(Y_t, W_t^D, I_t), \quad (14)$$

где $\xi^P = [\xi_t^P]_{t \geq 1} - [\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ - согласованный случайный процесс;

Y_t — ВВП;

W_t^D — заработная плата, выплачиваемая отечественными фирмами домашним хозяйствам;

I_t — инвестиции в основной капитал отечественной экономики; $T^P(\cdot, \cdot, \cdot)$ — (неслучайная) функция.

Задача максимизации полезности руководства отечественных фирм состоит в максимизации целевой функции (1) при выполнении условий (2)—(14) (и при заданных начальных значениях $K_0, PFA_0, M_0^{Pd}, M_0^{Pf}, B_0^{Hd}, B_0^{Gd}, B_0^{Hf}, B_0^{Gf}, B_0^{Ff}$).

Переменными в задаче (1)—(14) являются $[\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ -согласованные случайные траектории $I = [I_t]_{t \geq 1}$, $PFI = [PFI_t]_{t \geq 1}$, $MI^{Pd} = [MI_t^{Pd}]_{t \geq 1}$, $MI^{Pf} = [MI_t^{Pf}]_{t \geq 1}$, $I^{BHd} = [I_t^{BHd}]_{t \geq 1}$, $I^{BHf} = [I_t^{BHf}]_{t \geq 1}$, $I^{BGd} = [I_t^{BGd}]_{t \geq 1}$, $I^{BGf} = [I_t^{BGf}]_{t \geq 1}$, $I^{BFd} = [I_t^{BFd}]_{t \geq 1}$, $I^{BFf} = [I_t^{BFf}]_{t \geq 1}$, $I^E = [I_t^E]_{t \geq 1}$.

3.2. Спрос фирм на инвестиции

Обозначим через r_t^B вектор $(r_t^{Hd}, r_t^{Hf}, r_t^{Gd}, r_t^{Gf}, r_t^{Fd}, r_t^{Ff})$ доходностей заемного капитала отечественных фирм.

Очевидно, что оптимальные траектории $I, PFI, MI^{Pd}, I^{BHd}, I^{BHf}, I^{BGd}, I^{BGf}, I^{BFd}, I^{BFf}$ и I^E (задачи максимизации полезности отечественных фирм) зависят от траектории $r^B = [r_t^B]_{t \geq 1}$ доходностей заемного капитала и от траекторий $\hat{P}^d = [\hat{P}_t^d]_{t \geq 0}$, $\tilde{P}^f = [\tilde{P}_t^f]_{t \geq 0}$ цен в отечественной и иностранной валюте.

Из задачи максимизации полезности отечественных фирм видно, что указанные выше оптимальные траектории непосредственно зависят не от самих цен в отечественной и иностранной валюте, а от инфляций соответствующих цен. Однако инфляции цен (в отечественной и иностранной валюте) однозначно определяются траекториями соответствующих цен. Следовательно, можно считать, что $I, PFI, MI^{Pd}, MI^{Pf}, I^{BHd}, I^{BHf}, I^{BGd}, I^{BGf}, I^{BFd}, I^{BFf}$ и I^E — функции аргументов $r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f$, т. е.

$$\begin{aligned} I &= I(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad PFI = PFI(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ MI^{Pd} &= MI^{Pd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad MI^{Pf} = MI^{Pf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ I^{BHd} &= I^{BHd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad I^{BHf} = I^{BHf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ I^{BGd} &= I^{BGd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad I^{BGf} = I^{BGf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ I^{BFd} &= I^{BFd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad I^{BFf} = I^{BFf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ I^E &= I^E(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что с помощью оптимальных траекторий $I = [I_t]_{t \geq 1}$, $MI^{Pd} = [MI_t^{Pd}]_{t \geq 1}$, $MI^{Pf} = [MI_t^{Pf}]_{t \geq 1}$ определяются оптимальные траектории $K = [K_t]_{t \geq 1}$, $M^{Pd} = [M_t^{Pd}]_{t \geq 1}$, $M^{Pf} = [M_t^{Pf}]_{t \geq 1}$ (по формулам (8), (9)), а с помощью оптимальных траекторий $K = [K_t]_{t \geq 1}$, $M^{Pd} = [M_t^{Pd}]_{t \geq 1}$, $M^{Pf} = [M_t^{Pf}]_{t \geq 1}$ — оптимальная траектория $Y = [Y_t]_{t \geq 1}$ (по формуле (13)). Оптимальные траектории $Y = [Y_t]_{t \geq 1}$ и $I = [I_t]_{t \geq 1}$ определяют траекторию $T^P = [T_t^P]_{t \geq 1}$ (по формуле (14)). Следовательно (в силу зависимостей (15)), оптимальные траектории $K = [K_t]_{t \geq 1}$, $M^{Pd} = [M_t^{Pd}]_{t \geq 1}$, $M^{Pf} = [M_t^{Pf}]_{t \geq 1}$, $Y = [Y_t]_{t \geq 1}$ и траекторию $T^P = [T_t^P]_{t \geq 1}$ можно рассматривать как функции аргументов $r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f$, т. е.

$$\begin{aligned} K &= K(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad M^{Pd} = M^{Pd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad M^{Pf} = M^{Pf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ Y &= Y(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad T^P = T^P(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \end{aligned} \quad (16)$$

Оптимальные траектории $I^{BHd}, I^{BHf}, I^{BGd}, I^{BGf}, I^{BFd}, I^{BFf}$ и I^E (задачи максимизации полезности отечественных фирм) описывают спрос отечественных фирм на инвестиции заемного и собственного капитала, а оптимальные траектории M^{Pd} и M^{Pf} описывают спрос отечественных фирм на запасы отечественной и иностранной валюты. Обозначим эти оптимальные траектории, соответственно, через $DI^{BHd} = [DI_t^{BHd}]_{t \geq 1}$, $DI^{BHf} = [DI_t^{BHf}]_{t \geq 1}$, $DI^{BGd} = [DI_t^{BGd}]_{t \geq 1}$, $DI^{BGf} = [DI_t^{BGf}]_{t \geq 1}$, $DI^{BFd} = [DI_t^{BFd}]_{t \geq 1}$, $DI^{BFf} = [DI_t^{BFf}]_{t \geq 1}$,

$DI^E = [DI_t^E]_{t \geq 1}$, $DM^{Pd} = [DM_t^{Pd}]_{t \geq 1}$, $DM^{Pf} = [DM_t^{Pf}]_{t \geq 1}$ (первая буква D в этих обозначениях от термина *Demand*).

В соответствии с зависимостями (15), (16) траектории DI^{BHd} , DI^{BHf} , DI^{BGd} , DI^{BGf} , DI^{BFd} , DI^{BFf} , DI^E и DM^{Pd} , DM^{Pf} — функции аргументов r^B , \hat{P}^d , \tilde{P}^f , т. е.

$$\begin{aligned} DI^{BHd} &= DI^{BHd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), & DI^{BHf} &= DI^{BHf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ DI^{BGd} &= DI^{BGd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), & DI^{BGf} &= DI^{BGf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ DI^{BFd} &= DI^{BFd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), & DI^{BFf} &= DI^{BFf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ DI^E &= DI^E(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ DM^{Pd} &= DM^{Pd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), & DM^{Pf} &= DM^{Pf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, спрос отечественных фирм на финансовые инвестиции в заемный и собственный капитал и на денежные запасы отечественной и иностранной валюты определяется с помощью задачи максимизации полезности фирм и зависит от доходностей заемного капитала и от траекторий цен на продукцию в отечественной и иностранной валюте.

4. Домашние хозяйства

4.1. Задача максимизации полезности для домашних хозяйств

В модели предполагается, что полезность домашних хозяйств U^H определяется траекторией $C = [C_t]_{t \geq 1}$ конечного потребления и запасов $M^{Hd} = [M_t^{Hd}]_{t \geq 1}$ и $M^{Hf} = [M_t^{Hf}]_{t \geq 1}$ отечественной и иностранной валюты (выраженных в единицах продукции), причем

$$U^H(C) = E \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta_t^H u^H(C_t, M_t^{Hd}, M_t^{Hf}) \right], \quad (18)$$

где $u^H(\cdot)$ — функция полезности;

$\beta_t^H \in (0, 1)$ — коэффициент межвременных предпочтений для периода t ;

$\beta^H = [\beta_t^H]_{t \geq 1} = [\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ — согласованный случайный процесс.

Полезность домашних хозяйств зависит не только от конечного потребления, но и от реальных запасов отечественной и иностранной валюты (формула (18)). Включение реальных запасов отечественной и иностранной валюты в функцию полезности домашних хозяйств объясняется тем, что денежные запасы потребителей облегчают домашним хозяйствам осуществление сделок.

Между тем, не только реальные запасы валют, но и их вид влияют на полезность (отечественных) домашних хозяйств (формула (18)). Это связано с существованием правовых ограничений на использование резидентами иностранной валюты для внутренних сделок.

В модели предполагается, что

$$C_t = W_t^D + W_t^F + CF_t^{LH} - T_t^H - MI_t^{Hd} - MI_t^{Hf} - GI_t^H, \quad (19)$$

где W_t^D — зарплата, выплачиваемая домашним хозяйствам отечественными фирмами (фирмами-резидентами);

W_t^F — доходы в иностранной валюте, получаемые домашними хозяйствами из-за рубежа;

CF_t^{LH} — денежные потоки, выплачиваемые отечественными фирмами домашним хозяйствам (как владельцам заемного и собственного капитала);

T_t^H — налоги, взимаемые государством с домашних хозяйств;

MI_t^{Hd} и MI_t^{Hf} — инвестиции домашних хозяйств в свои запасы, соответственно, отечественной и иностранной валюты;

GI_t^H — инвестиции домашних хозяйств в свои запасы золота (и других драгоценностей).

В T_t^H (формула (19)) можно также включить правительственные трансферты домашним хозяйствам.

Включение в модель запаса золота (и других драгоценностей) домашних хозяйств (формула (19)) объясняется тем, что в модель включен государственный золотой запас (оказывающий влияние на экономическую политику правительства), а правительство может покупать (и продавать) золото у населения.

Траектория $CF^{LH} = [CF_t^{LH}]_{t \geq 1}$ суммарных денежных потоков, выплачиваемых отечественными фирмами домашним хозяйствам, зависит от траекторий $I^{BHd} = [I_t^{BHd}]_{t \geq 1}$, $I^{BHf} = [I_t^{BHf}]_{t \geq 1}$ и $I^{EH} = [I_t^{EH}]_{t \geq 1}$ инве-

стиций домашних хозяйств в заемный и собственный капитал. Следовательно, можно считать, что траектория CF^{LH} — функция аргументов I^{BHd} , I^{BHf} и I^{EH} , т. е.

$$CF^{LH} = CF^{LH}(I^{BHd}, I^{BHf}, I^{EH}). \quad (20)$$

Инвестиции I_t^{BHd} , I_t^{BHf} , I_t^{EH} могут быть отрицательными. Однако при этом должны выполняться условия допустимости соответствующих траекторий.

В модели предполагается, что налоги T_t^H , выплачиваемые домашними хозяйствами, определяются в соответствии с формулой

$$T_t^H = \xi_t^H T^H(W_t^D, W_t^F, CF_t^{LH}), \quad (21)$$

где $\xi^H = [\xi_t^H]_{t \geq 1}$ — согласованный случайный процесс;

$T^H(\cdot, \cdot, \cdot)$ — (неслучайная) функция.

Заметим, что

$$M_t^{Hd} = \frac{M_{t-1}^{Hd}}{1 + i_t^d} + MI_t^{Hd}, \quad M_t^{Hf} = \frac{M_{t-1}^{Hf}}{1 + i_t^f} + MI_t^{Hf}, \quad (22)$$

где i_t^d и i_t^f — уровни инфляции, соответственно, отечественной и иностранной валюты;

$$GS_t^H = GS_{t-1}^H + GI_t^H, \quad (23)$$

где GS_t^H — запас золота (и других драгоценностей) домашних хозяйств в конце периода t .

Инвестиции MI_t^{Hd} , MI_t^{Hf} и GI_t^H могут быть отрицательными, однако должны выполняться условия неотрицательности для соответствующих запасов:

$$M_t^{Hd} \geq 0, \quad M_t^{Hf} \geq 0, \quad GS_t^H \geq 0. \quad (24)$$

Задача максимизации полезности домашних хозяйств состоит в максимизации целевой функции (18) при выполнении условий (19)—(24), условия неотрицательности конечного потребления C_t , условия допустимости траекторий I^{BHd} , I^{BHf} и I^{EH} (при заданных начальных значениях M_0^{Hd} , M_0^{Hf} , GS_0^H).

Переменными в задаче максимизации полезности домашних хозяйств являются $[\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ -согласованные случайные траектории $I^{BHd} = [I_t^{BHd}]_{t \geq 1}$, $I^{BHf} = [I_t^{BHf}]_{t \geq 1}$, $I^{EH} = [I_t^{EH}]_{t \geq 1}$, $MI^{Hd} = [MI_t^{Hd}]_{t \geq 1}$, $MI^{Hf} = [MI_t^{Hf}]_{t \geq 1}$ и $GI^H = [GI_t^H]_{t \geq 1}$.

4.2. Предложение инвестиций домашними хозяйствами

Напомним, что через r_t^B обозначен вектор $(r_t^{Hd}, r_t^{Hf}, r_t^{Gd}, r_t^{Gf}, r_t^{Fd}, r_t^{Ff})$ доходностей заемного капитала отечественных фирм.

Очевидно, что оптимальные траектории I^{BHd} , I^{BHf} , I^{EH} , MI^{Hd} , MI^{Hf} , GI^H (задачи максимизации полезности домашних хозяйств) зависят от траектории $r^B = [r_t^B]_{t \geq 1}$ доходностей заемного капитала отечественных фирм и от траекторий $\hat{P}^d = [\hat{P}_t^d]_{t \geq 0}$, $\tilde{P}^f = [\tilde{P}_t^f]_{t \geq 0}$ цен в отечественной и иностранной валюте.

З а м е ч а н и е. Как видно из задачи максимизации полезности домашних хозяйств, указанные выше оптимальные траектории непосредственно зависят не от самих цен в отечественной и иностранной валюте, а от инфляций соответствующих цен. Однако инфляции цен (в отечественной и иностранной валюте) однозначно определяются траекториями соответствующих цен.

Следовательно, можно считать, что I^{BHd} , I^{BHf} , I^{EH} , MI^{Hd} , MI^{Hf} и GI^H — функции аргументов r^B , \hat{P}^d , \tilde{P}^f , т. е.

$$\begin{aligned} I^{BHd} &= I^{BHd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), & I^{BHf} &= I^{BHf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), & I^{EH} &= I^{EH}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ MI^{Hd} &= MI^{Hd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), & MI^{Hf} &= MI^{Hf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), & GI^H &= GI^H(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что с помощью оптимальных траекторий $I^{BHd} = [I_t^{BHd}]_{t \geq 1}$, $I^{BHf} = [I_t^{BHf}]_{t \geq 1}$, $I^{EH} = [I_t^{EH}]_{t \geq 1}$, $MI^{Hd} = [MI_t^{Hd}]_{t \geq 1}$, $MI^{Hf} = [MI_t^{Hf}]_{t \geq 1}$ и $GI^H = [GI_t^H]_{t \geq 1}$ определяются оптимальные траектории $CF^{LH} = [CF_t^{LH}]_{t \geq 1}$, $M^{Hd} = [M_t^{Hd}]_{t \geq 1}$, $M^{Hf} = [M_t^{Hf}]_{t \geq 1}$ и $GS^H = [GS_t^H]_{t \geq 1}$ (формулы (20), (22), (23)), а с

помощью оптимальной траектории $CF^{LH} = [CF_t^{LH}]_{t \geq 1}$ — траектория $T^H = [T_t^H]_{t \geq 1}$ (формула (21)). С помощью оптимальных траекторий CF^{LH} , M^{Hd} , M^{Hf} , GI^H и траектории $T^H = [T_t^H]_{t \geq 1}$ определяется оптимальная траектория конечного потребления $C = [C_t]_{t \geq 1}$ (формула (19)). Следовательно (в силу зависимостей (25)), оптимальные траектории $M^{Hd} = [M_t^{Hd}]_{t \geq 1}$, $M^{Hf} = [M_t^{Hf}]_{t \geq 1}$, $GI^H = [GI_t^H]_{t \geq 1}$, $T^H = [T_t^H]_{t \geq 1}$ и $C = [C_t]_{t \geq 1}$ можно рассматривать как функции аргументов r^B , \hat{P}^d , \tilde{P}^f , т. е.

$$\begin{aligned} M^{Hd} &= M^{Hd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad M^{Hf} = M^{Hf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad GS^H = GS^H(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ T^H &= T^H(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad C = C(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что оптимальные траектории I^{BHd} , I^{BFf} и I^{EH} (задачи максимизации полезности домашних хозяйств) описывают предложение инвестиций домашних хозяйств в заемный и собственный капитал отечественных фирм, а оптимальные траектории M^{Hd} и M^{Hf} описывают спрос домашних хозяйств на запасы отечественной и иностранной валюты. Обозначим эти оптимальные траектории, соответственно, через SI^{BHd} , SI^{BFf} , SI^{EH} (первая буква S в этих обозначениях от слова *Supply*) и DM^{Hd} , DM^{Hf} .

В соответствии с зависимостями (25), (26) SI^{BHd} , SI^{BFf} , SI^{EH} и DM^{Hd} , DM^{Hf} — функции аргументов r^B , \hat{P}^d , \tilde{P}^f , т. е.

$$\begin{aligned} SI^{BHd} &= SI^{BHd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad SI^{BFf} = SI^{BFf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad SI^{EH} = SI^{EH}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \\ DM^{Hd} &= DM^{Hd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad DM^{Hf} = DM^{Hf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, предложение финансовых инвестиций (в заемный и собственный капитал отечественных фирм) домашними хозяйствами, а также спрос домашних хозяйств на денежные запасы отечественной и иностранной валюты определяется с помощью задачи максимизации полезности домашних хозяйств и зависит от доходностей заемного капитала и от траекторий цен на продукцию в отечественной и иностранной валюте.

5. Иностранные инвесторы

5.1. Задача максимизации полезности иностранных инвесторов

В модели предполагается, что полезность U^F иностранных инвесторов определяется траекторией $CF^{LF} = [CF_t^{LF}]_{t \geq 1}$ денежных потоков (выраженных в единицах продукции), выплачиваемых отечественными фирмами иностранным инвесторам как владельцам заемного и собственного капитала, причем

$$U^F(CF^{LF}) = E \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta_t^F \cdot u^F(CF_t^{LF}) \right], \quad (28)$$

где $u^F(\cdot)$ — функция полезности;

$\beta_t^F \in (0, 1)$ — коэффициент межвременных предпочтений для периода t ;

$\beta^F = [\beta_t^F]_{t \geq 1}$ — согласованный случайный процесс.

З а м е ч а н и е. Денежные потоки CF_t^{LF} могут быть отрицательными.

Заметим, что траектория $CF^{LF} = [CF_t^{LF}]_{t \geq 1}$ денежных потоков, выплачиваемых отечественными фирмами иностранным инвесторам, зависит от траекторий $I^{BFd} = [I_t^{BFd}]_{t \geq 1}$, $I^{BFf} = [I_t^{BFf}]_{t \geq 1}$ и $I^{EF} = [I_t^{EF}]_{t \geq 1}$ иностранных инвестиций в заемный и собственный капитал. Следовательно, можно считать, что траектория CF^{LF} — функция аргументов I^{BFd} , I^{BFf} и I^{EF} , т. е.

$$CF^{LF} = CF^{LF}(I^{BFd}, I^{BFf}, I^{EF}). \quad (29)$$

Отметим, что инвестиции I_t^{BFd} , I_t^{BFf} и I_t^{EF} могут быть отрицательными. Однако при этом должны выполняться условия допустимости соответствующих траекторий.

Задача максимизации полезности иностранных инвесторов состоит в максимизации целевой функции (28) при выполнении условия допустимости траекторий I^{BFd} , I^{BFf} и I^{EF} .

Переменными в максимизации полезности иностранных инвесторов являются $[F_t]_{t \geq 1}$ -согласованные случайные траектории I^{BFd} , I^{BFf} и I^{EF} .

5.2. Предложение иностранных инвестиций

Заметим, что оптимальные значения переменных I^{BFd} , I^{BFf} и I^{EF} (задачи максимизации полезности иностранных инвесторов) описывают предложение иностранных инвестиций в заемный и собственный капитал. Обозначим оптимальные значения этих переменных SI^{BFd} , SI^{BFf} и SI^{EF} .

Напомним, что через r_t^B обозначен вектор $(r_t^{Hd}, r_t^{Hf}, r_t^{Gd}, r_t^{Gf}, r_t^{Fd}, r_t^{Ff})$ доходностей заемного капитала отечественных фирм.

Из зависимости (29) следует, что оптимальные траектории SI^{BFd} , SI^{BFf} и SI^{EF} (задачи максимизации полезности иностранных инвесторов) зависят от траекторий $r^B = [r_t^B]_{t \geq 1}$, $\hat{P}^d = [\hat{P}_t^d]_{t \geq 0}$ и $\tilde{P}^f = [\tilde{P}_t^f]_{t \geq 0}$.

Следовательно, мы можем считать, что SI^{BFd} , SI^{BFf} и SI^{EF} — функции аргументов r^B , \hat{P}^d , \tilde{P}^f , т.е.

$$SI^{BFd} = SI^{BFd}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad SI^{BFf} = SI^{BFf}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f), \quad SI^{EF} = SI^{EF}(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \quad (30)$$

Таким образом, предложение иностранных финансовых инвестиций (в заемный и собственный капитал отечественных фирм) определяется с помощью задачи максимизации полезности иностранных инвесторов и зависит от доходностей заемного капитала и от траекторий цен на продукцию в отечественной и иностранной валюте.

6. Государство (правительство)

В модели предполагается, что правительство экзогенно определяет государственные инвестиции в заемный и собственный капитал отечественных фирм, процентные ставки государственных кредитов отечественным фирмам, денежные потоки, генерируемые правительственными иностранными активами и обязательствами, инвестиции в правительственные запасы золота и иностранной валюты, налоговую политику (в отношении отечественных фирм и домашних хозяйств) и правительственные (государственные) расходы.

6.1. Денежные потоки правительства

В модели предполагается, что суммарный денежный поток CF_t^G правительства (выраженный в единицах продукции) равен

$$CF_t^G = T_t - G_t + CF_t^{LG} + CF_t^{NGFA} + GR_t^G, \quad (31)$$

где T_t — суммарные налоговые поступления;

G_t — правительственные расходы;

CF_t^{LG} — денежный поток, выплачиваемый государству (правительству) как владельцу заемного и собственного капитала отечественных фирм;

CF_t^{NGFA} — денежный поток правительства от чистых правительственных зарубежных активов;

GR_t^G — доходы от продажи золота (и других драгоценностей).

З а м е ч а н и е. Денежные потоки CF_t^{LG} , CF_t^{NGFA} и GR_t^G могут быть отрицательными.

Правительственные иностранные активы и обязательства в явном виде в модели не присутствуют. Однако в модели присутствуют генерируемые ими денежные потоки CF_t^{NGFA} . Если в процессе исследования возникнет необходимость более детального исследования этих факторов, они будут включены в модель.

В модели отсутствуют государственные облигации. Это объясняется тем, что в Беларуси рынок государственных облигаций слабо развит. Вполне возможно, что в процессе исследований возникнет необходимость включения этого фактора в модель.

В модели предполагается, что суммарные налоговые поступления T_t равны сумме налогов, взимаемых с отечественных фирм (фирм-резидентов) и с домашних хозяйств, т.е.

$$T_t = T_t^P + T_t^H. \quad (32)$$

(Напомним, что T_t^P и T_t^H определяются по формулам (14) и (21).)

Траектория $CF_t^{LG} = [CF_t^{LG}]_{t \geq 1}$ денежных потоков, выплачиваемых отечественными фирмами правительству (как владельцу заемного и собственного капитала), зависит от траекторий $I^{BGd} = [I_t^{BGd}]_{t \geq 1}$, $I^{BGf} = [I_t^{BGf}]_{t \geq 1}$ и $I^{EG} = [I_t^{EG}]_{t \geq 1}$ правительственных инвестиций в заемный и собственный капитал. Очевидно также, что траектория CF_t^{LG} зависит также от траектории $r^B = [r_t^B]_{t \geq 1}$ (вектора

$r_t^B = (r_t^{Hd}, r_t^{Hf}, r_t^{Gd}, r_t^{Gf}, r_t^{Fd}, r_t^{Ff})$ доходностей заемного капитала) и траекторий $\hat{P}^d = [\hat{P}_t^d]_{t \geq 0}$, $\tilde{P}^f = [\tilde{P}_t^f]_{t \geq 0}$ цен в отечественной и иностранной валюте. Следовательно, можно считать, что траектория CF^{LG} — функция аргументов I^{BGd} , I^{BGf} , I^{EG} , r^B , \hat{P}^d и \tilde{P}^f , т. е.

$$CF^{LG} = CF^{LG}(I^{BGd}, I^{BGf}, I^{EG}; r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \quad (33)$$

Отметим, что инвестиции I^{BGd} , I^{BGf} и I^{EG} могут быть отрицательными. Однако при этом должны выполняться условия допустимости соответствующих траекторий.

Напомним, что чистые государственные иностранные активы — это разность между государственными иностранными активами и обязательствами. Денежный поток правительства CF_t^{NGFA} от чистых государственных зарубежных активов равен разности между денежным потоком CF_t^{GFA} , получаемым в результате владения правительством иностранными активами, и денежным потоком CF_t^{GFL} , выплачиваемым правительством по обязательствам перед иностранцами.

6.2. Государственный золотой запас

Обозначим через GS_t^G золотой запас государства (правительства) в конце периода t . Под инвестициями GI_t^G в золотой запас правительства в периоде t будем понимать его изменение в периоде t , т. е.

$$GI_t^G = GS_t^G - GS_{t-1}^G. \quad (34)$$

В модели предполагается, что цены на золото в отечественной и иностранной валюте совпадают с соответствующими ценами на продукцию. Используя это допущение, несложно показать, что

$$GR_t^G = -GI_t^G. \quad (35)$$

Подставив (32), (35) в (31), получим

$$CF_t^G = T_t^P + T_t^H - G_t + CF_t^{LG} + CF_t^{NGFA} - GI_t^G. \quad (36)$$

Из (34) следует, что

$$GS_t^G = GS_{t-1}^G + GI_t^G. \quad (37)$$

Инвестиции GI_t^G в золотой запас правительства могут быть отрицательными. Однако должно выполняться условие неотрицательности золотого запаса, т. е.

$$GS_t^G \geq 0. \quad (38)$$

Отметим, что при заданном начальном значении GS_0^G золотого запаса правительства траектория инвестиций $GI^G = [GI_t^G]_{t \geq 1}$ однозначно определяет (по формуле (37)) траекторию $GS^G = [GS_t^G]_{t \geq 1}$ золотого запаса.

Под допустимой траекторией инвестиций $GI^G = [GI_t^G]_{t \geq 1}$ в золотой запас правительства будем понимать такую траекторию инвестиций, при которой траектория $GS^G = [GS_t^G]_{t \geq 1}$ золотого запаса удовлетворяет условию неотрицательности (38).

6.3. Государственный запас иностранной валюты

Обозначим через M_t^{Gf} правительственный запас иностранной валюты (выраженный в единицах продукции) в конце периода t . Заметим, что

$$M_t^{Gf} = \frac{M_{t-1}^{Gf}}{1 + i_t^f} + MI_t^{Gf}, \quad (39)$$

где MI_t^{Gf} — инвестиции в правительственный запас иностранной валюты, выраженные в единицах продукции; i_t^f — уровень инфляции иностранной валюты в периоде t .

Заметим, что инвестиции MI_t^{Gf} в правительственный запас иностранной валюты могут быть отрицательными. Однако должны выполняться условия неотрицательности для запаса M_t^{Gf} иностранной валюты, т. е.

$$M_t^{Gf} \geq 0. \quad (40)$$

При заданном начальном значении M_0^{Gf} траектория инвестиций $MI^{Gf} = [MI_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ однозначно определяет (по формуле (39)) траекторию $M^{Gf} = [M_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ запаса иностранной валюты.

Под допустимой (случайной) траекторией инвестиций $MI^{Gf} = [MI_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ в правительственный (государственный) запас иностранной валюты будем понимать такую траекторию инвестиций, при которой траектория $M^{Gf} = [M_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ запаса иностранной валюты удовлетворяет условию неотрицательности (40).

7. Денежная масса отечественной валюты

Обозначим через \hat{M}_t^d номинальную (денежную) массу отечественной валюты в конце периода t , а через M_t^d — реальную (денежную) массу отечественной валюты, т.е.

$$M_t^d = \frac{\hat{M}_t^d}{\hat{P}_t^d}, \quad (41)$$

где \hat{P}_t^d — цена единицы продукции в отечественной валюте (в периоде t).

7.1. Предложение реальной денежной массы отечественной валюты

Можно показать, что

$$M_t^d = \frac{M_{t-1}^d}{1 + i_t^d} - CF_t^G + MI_t^{Gf}, \quad (42)$$

где CF_t^G — суммарный денежный поток правительства (формулы (31), (36));

MI_t^{Gf} — инвестиции в правительственный запас иностранной валюты;

i_t^d — уровень инфляции отечественной валюты.

Таким образом (как видно из формулы (42)), изменение реальной (денежной) массы отечественной валюты в конечном счете зависит от суммарного денежного потока правительства, от изменения правительственного запаса иностранной валюты и от инфляции цены в национальной валюте.

Обозначим через SM_t^d предложение реальной денежной массы отечественной валюты. С учетом этого обозначения равенство (42) запишем в виде

$$SM_t^d = \frac{SM_{t-1}^d}{1 + i_t^d} - CF_t^G + MI_t^{Gf}. \quad (43)$$

7.2. Спрос на реальную денежную массу отечественной валюты

Обозначим через DM_t^d спрос на реальную денежную массу отечественной валюты. Очевидно,

$$DM_t^d = DM_t^{Pd} + DM_t^{Hd}, \quad (44)$$

где DM_t^{Pd} и DM_t^{Hd} — спрос на реальную денежную массу отечественной валюты, соответственно, отечественных фирм и домашних хозяйств.

В силу равенств (17), (27), (44)

$$DM^d = DM^d(r^B, \hat{P}^d, \tilde{P}^f). \quad (45)$$

8. Равновесие

8.1. Экзогенные переменные

Наряду с перечисленными выше экзогенными переменными, определяемыми правительством, в модели предполагается, что цены в иностранной валюте, доходность иностранных активов отечественных фирм, заработная плата, выплачиваемая отечественными фирмами домашним хозяйствам, и доходы, получаемые домашними хозяйствами из-за рубежа, также заданы экзогенно.

Кроме того, начальные значения всех запасов также заданы экзогенно.

Некоторые замечания.

1. Вполне возможно, что в процессе исследований возникнет необходимость более детального исследования заработной платы, выплачиваемой отечественными фирмами домашним хозяйствам. (В этом случае модель будет соответствующим образом модифицирована.)

Таким образом, в модели предполагается, что экзогенно заданы следующие $[\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ -согласованные случайные траектории:

$r^{PFA} = [r_t^{PFA}]_{t \geq 1}$ (траектория доходностей иностранных активов отечественных фирм); $\tilde{P}^f = [\tilde{P}_t^f]_{t \geq 0}$ (траектория цен в иностранной валюте),

$W^D = [W_t^D]_{t \geq 1}$ (траектория заработной платы, выплачиваемой отечественными фирмами домашним хозяйствам),

$W^F = [W_t^F]_{t \geq 1}$ (траектория доходов, получаемых домашними хозяйствами из-за рубежа),

$r^{Gd} = [r_t^{Gd}]_{t \geq 1}$ и $r^{Gf} = [r_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ (траектории доходностей правительственного заемного капитала в отечественной и иностранной валюте, соответственно),

$G = [G_t]_{t \geq 1}$ (траектория правительственных расходов),

$CF^{NGFA} = [CF_t^{NGFA}]_{t \geq 1}$ (траектория денежных потоков правительства от чистых правительственных иностранных активов),

$SI^{BGd} = [SI_t^{BGd}]_{t \geq 1}$ и $SI^{BGf} = [SI_t^{BGf}]_{t \geq 1}$ (траектории правительственных инвестиций в заемный капитал отечественных фирм, соответственно, в отечественной и иностранной валюте),

$SI^{EG} = [SI_t^{EG}]_{t \geq 1}$ (траектория правительственных инвестиций в собственный капитал отечественных фирм),

$GI^G = [GI_t^G]_{t \geq 1}$ и $MI^{Gf} = [MI_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ (траектории инвестиций в правительственные запасы, соответственно, золота и иностранной валюты).

2. Экзогенно заданные траектории $GI^G = [GI_t^G]_{t \geq 1}$ и $MI^{Gf} = [MI_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ (инвестиций в правительственные запасы, соответственно, золота и иностранной валюты) должны удовлетворять условиям допустимости, т. е. для соответствующих им траекторий запасов $M^{Gf} = [M_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ и $GS^G = [GS_t^G]_{t \geq 1}$ (определяемых по формулам (37) и (39), соответственно) должны выполняться условия неотрицательности (38) и (40). Экзогенно заданные траектории $SI^{BGd} = [SI_t^{BGd}]_{t \geq 1}$, $SI^{BGf} = [SI_t^{BGf}]_{t \geq 1}$ и $SI^{EG} = [SI_t^{EG}]_{t \geq 1}$ (инвестиций в правительственный заемный и собственный капитал отечественных фирм) также должны быть допустимыми.

3. Отметим, что (экзогенно заданные) траектории $r^{Gd} = [r_t^{Gd}]_{t \geq 1}$, $r^{Gf} = [r_t^{Gf}]_{t \geq 1}$, $G = [G_t]_{t \geq 1}$, $CF^{NGFA} = [CF_t^{NGFA}]_{t \geq 1}$, $SI^{BGd} = [SI_t^{BGd}]_{t \geq 1}$, $SI^{BGf} = [SI_t^{BGf}]_{t \geq 1}$, $SI^{EG} = [SI_t^{EG}]_{t \geq 1}$, $MI^{Gf} = [MI_t^{Gf}]_{t \geq 1}$ и $GI^G = [GI_t^G]_{t \geq 1}$ устанавливаются правительством. Кроме того, правительство устанавливает функции $\xi_t^P T^P(Y_t, W_t^D, I_t)$ и $\xi_t^H T^H(W_t^D, W_t^F, CF_t^{LH})$ налогов, взимаемых, соответственно, с отечественных фирм (фирм-резидентов) и домашних хозяйств.

8.2. Равновесное состояние

Равновесное состояние в модели определяется траекториями доходностей заемного капитала (отечественных фирм), домашних хозяйств и иностранных инвесторов, траекторией цен в отечественной валюте и траекторией денежной массы отечественной валюты, при которых спрос отечественных фирм на финансовые инвестиции (в собственный и заемный капитал) равен суммарному предложению финансовых инвестиций (в заемный и собственный капитал отечественных фирм) домашними хозяйствами, иностранными инвесторами и государством, и при этом реальная (денежная) масса отечественной валюты находится в соответствии с экономической политикой правительства.

Дадим формальное (математическое) определение равновесного состояния.

Обозначим через r_t^{HF} вектор $(r_t^{Hd}, r_t^{Hf}, r_t^{Fd}, r_t^{Ff})$ доходностей заемного капитала домашних хозяйств и иностранных инвесторов, а через r_t^G — вектор (r_t^{Gd}, r_t^{Gf}) доходностей заемного капитала правительства.

Заметим, что вектор $r_t^B = (r_t^{Hd}, r_t^{Hf}, r_t^{Gd}, r_t^{Gf}, r_t^{Fd}, r_t^{Ff})$ доходностей заемного капитала можно рассматривать как вектор $r_t^B = (r_t^{HF}, r_t^G)$, состоящий из векторов $r_t^{HF} = (r_t^{Hd}, r_t^{Hf}, r_t^{Fd}, r_t^{Ff})$ и $r_t^G = (r_t^{Gd}, r_t^{Gf})$.

Напомним, что \hat{P}_t^d — цена продукции в отечественной валюте.

Равновесное состояние в модели задается вектором (r^{HF}, \hat{P}^d) (где $r^{HF} = [r_t^{HF}]_{t \geq 1}$ и $\hat{P}^d = [\hat{P}_t^d]_{t \geq 0}$ — $[\mathcal{F}_t]_{t \geq 1}$ -согласованные случайные траектории), при котором выполняются следующие условия:

1) спрос отечественных фирм на финансовые инвестиции (в заемный и собственный капитал) равен предложению финансовых инвестиций домашними хозяйствами, иностранными инвесторами и государством, т. е.

$$DI^{BHd} = SI^{BHd}, DI^{BFd} = SI^{BFd}, DI^{BGd} = SI^{BGd}, \quad (46)$$

$$DI^{BHf} = SI^{BHf}, DI^{BFf} = SI^{BFf}, DI^{BGf} = SI^{BGf}, \quad (47)$$

$$DI^E = SI^{EH} + SI^{EF} + SI^{EG}; \quad (48)$$

2) суммарный спрос отечественных фирм и домашних хозяйств на отечественную валюту равен предложению $SM^d = [SM_t^d]_{t \geq 1}$ (реальной) денежной массы отечественной валюты, т. е.

$$DM^{Pd} + DM^{Hd} = SM^d; \quad (49)$$

3) предложение денежной массы отечественной валюты находится в соответствии с экономической политикой правительства, т. е.

$$SM_t^d = \frac{SM_{t-1}^d}{1 + i_t^d} - CF_t^G + MI_t^{Gf}, \quad (50)$$

$$CF_t^G = T_t^P + T_t^H - G_t + CF_t^{LG} + CF_t^{NGFA} - GI_t^G, \quad (51)$$

где

$DI^{BHd} = DI^{BHd}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$, $DI^{BHf} = DI^{BHf}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$, $DI^{BGd} = DI^{BGd}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$,
 $DI^{BGf} = DI^{BGf}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$, $DI^{BFd} = DI^{BFd}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$, $DI^{BFf} = DI^{BFf}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ и
 $DI^E = DI^E(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ — спрос отечественных фирм на инвестиции в собственный и заемный капитал (равенства (17));

$SI^{BHd} = SI^{BHd}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$, $SI^{BHf} = SI^{BHf}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ и $SI^{EH} = SI^{EH}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ — предложение инвестиций в заемный и собственный капитал отечественных фирм домашними хозяйствами (равенства (27));

$SI^{BFd} = SI^{BFd}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$, $SI^{BFf} = SI^{BFf}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ и $SI^{EF} = SI^{EF}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ — предложение иностранных инвестиций в заемный и собственный капитал отечественных фирм (равенства (30));

$SI^{BGd} = [SI_t^{BGd}]_{t \geq 1}$, $SI^{BGf} = [SI_t^{BGf}]_{t \geq 1}$, $SI^{EG} = [SI_t^{EG}]_{t \geq 1}$ — экзогенно заданные траектории предложения правительственных инвестиций в заемный и собственный капитал отечественных фирм;

$DM^{Pd} = DM^{Pd}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$, $DM^{Hd} = DM^{Hd}(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ — спрос на реальные денежные запасы, соответственно, отечественных фирм и домашних хозяйств (равенства (17) и (27));

SM_t^d — предложение реальной денежной массы отечественной валюты;

i_t^d — уровень инфляции отечественной валюты;

CF_t^G — суммарный денежный поток правительства (определяемый по формуле (51));

MI_t^{Gf} — экзогенно заданные инвестиции в правительственный запас иностранной валюты;

$T_t^P = T_t^P(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ — налоги, взимаемые с отечественных фирм (фирм-резидентов) (равенства (16));

$T_t^H = T_t^H(r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ — налоги, взимаемые с домашних хозяйств (равенства (26));

G_t — экзогенно заданные государственные (правительственные) расходы;

$CF_t^{LG} = CF_t^{LG}(I^{BGd}, I^{BGf}, I^{EG}; r^{HF}, r^G; \hat{P}^d, \tilde{P}^f)$ — денежный поток, выплачиваемый государству (правительству) как владельцу заемного и собственного капитала отечественных фирм (равенство (33));

CF_t^{NGFA} — заданный экзогенно денежный поток правительства от чистых правительственных иностранных активов;

GI_t^G — экзогенно заданные инвестиции в правительственный запас золота.

Равновесное состояние эконометрической модели в итоге позволяет реально определить детерминанты экономического роста в Беларуси с учетом ряда допущений в кратко- и долгосрочном периоде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденков В. М. Развитие экономики Беларуси: модель и проблемы // Белорусский журнал международного права и международных отношений. 2003. № 1. С. 76—79.
2. Аксень Э. М., Руденков С. В. Некоторые особенности моделирования белорусской экономики // Белорусский журнал международного права и международных отношений. 2003. № 2. С. 89—93.
3. Obstfeld M., Rogoff K. Foundations of International Macroeconomics. MIT Press, 1996.
4. Kamien M. I., Schwartz N. L. Dynamic Optimization. North-Holland, 1991.
5. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002.
6. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
7. Schenk-Hoppé K.R. Random Dynamical Systems in Economics // Stochastics and Dynamics. 2001. V. 1. N 1. P. 63—83.

SUMMARY

"Stochastic Modeling of the Economy of the Country" (Ernest Aksent, Vladimir Rudenkov)

1. Purpose of the model

The stochastic dynamic model suggested by the authors is intended to determine and explore the determinants of economic growth in Belarus, to estimate the impact of the governments' investment, tax, monetary and budget policies on the macroeconomic indicators (GDP, inflation, dollarization, domestic and foreign investments, etc.), to investigate different hypothetical scenarios of the economic policy, and to choose the optimal ones.

As a rule, each of the possible scenarios of the economic policies has its advantages and disadvantages. It is important to determine which effect of one or another scenario of the economic policy — positive or negative — prevails and what the aggregate influence on the economic growth is. (For example, in Belarus the wide use of granting the government credits, of the government's investments into the firms' equity, as well as of subsidizing the enterprises, on one hand, has a positive impact on the economic growth and, on the other hand, a negative one, since the above mentioned measures are taken at the expense of the monetary emission (seigniorage). Therefore, it is interesting and significant to determine the predominating effect and to come to a conclusion concerning the correctness of this element of the economic policy.)

2. Methodology of the construction and use of the model

This model has both theoretical and econometric features, i. e. on the one hand, it describes the structure of the studied economic systems (Belarus' economy), and on the other hand, it is intended for the use of empirical data. The stochastic nature of the model allows to consider financial and production risks for forecasting.

The model takes into account the interests of the economic agents: households, firms and foreign investors.

When constructing and exploring the model, the following mathematical tools have been (and will be) used: random processes, stochastic optimal control, Monte-Carlo simulation.

3. Exploration of the model

The model will be explored by means of the functional analysis. There will be constructed normed spaces whose elements are random paths, and the utility maximization problems (for households, government and foreign investors) will be formulated in the relevant normed spaces (of random paths). Then, by means of the theory of optimal control in normed spaces (presented, for example, in the book [Alexeev V. M., Tihomirov V. M., Fomin S. V. (1979)]), the relevant first-order conditions (Kuhn-Tucker conditions) will be derived. The derived first-order conditions will be used both for theoretical (a-priori) exploration of the model and for the numerical modeling. The numerical modeling will be based on the method of Monte-Carlo simulation.

4. Estimation of the model's parameters

When determining the type (specification) and estimating parameters of production and utility functions, and of other elements of the model, the main difficulty will consist in insufficient quantities of empirical data (in particular, the relevant time series are too short).

These problems (with the shortage of data) will be tackled in the following way. The regression models with the use of panel data will be run (i. e. for the estimation of parameters for Belarus' economy, there will be used data not only for this country but also for other ones). Besides, the regression methods will be integrated with the methods of expert estimation.

5. Level of the model's development

By the current moment, a preliminary version of the model has been constructed. The model will be further developed taking into account empirical data and experts' opinions.

6. Stages of Research

1. Construction of a structural dynamic model: description of relationship between macroeconomic indicators by means of algebraic equations.

2. Construction of a theoretical dynamic model basing on the structural model: description of interests of economic agents by means of utility maximization problems.
3. Construction of a stochastic dynamic model basing on the theoretical model.
4. Exploration of the stochastic dynamic model for its correctness: issues of the existence and uniqueness of the equilibrium.
5. Construction of systems of stochastic equations for finding optimal solutions of utility maximization problems.
6. Obtaining of theoretical results of qualitative nature.
7. Development of computing algorithms for obtaining numerical results.
8. Collection of empirical economic data.
9. Estimation of specification and parameters of the model (production function, utility functions, etc.).
10. Obtaining numerical results with the help of the developed algorithms basing on empirical data.
11. Analysis of the obtained results and development of suggestions on perfecting Belarus' economic policy.

The authors will be thankful to everybody who wants to cooperate in discussing, elaboration and implementation of the model for forecasting scenarios of economic development of the country.